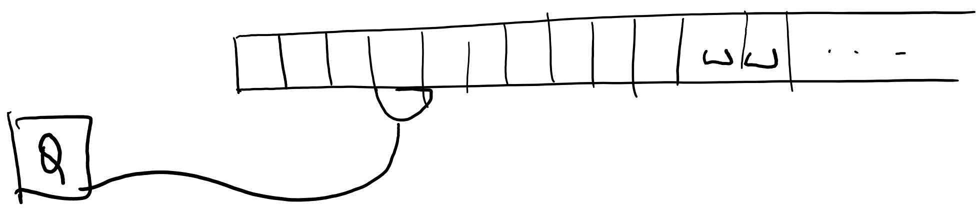
Prostorova slozitost

30 November, 2020 13:55

TS M



$S_M(x)$ ... počet navštívených políček během výpočtu na vstupu x. ... prostor výpočtu na $\underline{x}$.

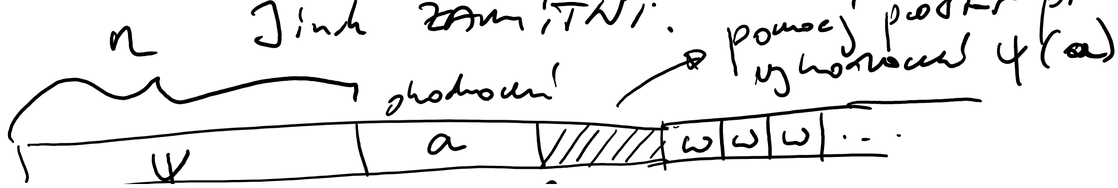
$$s_M(n) = \max_{x \in \Sigma^n} s_M(x)$$

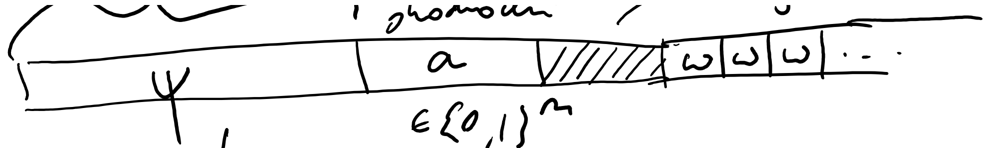
$$DSPACE(s(n)) = \{L \subseteq \Sigma^*;\ \exists\, TS\ M;\ L(M) = L \text{ a } s_M(n) = O(s(n))\}$$

M pracuje v prostoru $O(s(n))$

<u>Př:</u> $SAT \in DSPACE(n)$

... alg: na vstupu ψ vezmi jedno ~~splňující~~ ohodnocení proměnných po druhém a pro každé ověř, zda náhodou nesplňuje ψ.
Pokud narazíme na splňující ohodnocení
$\rightarrow$ PŘIJMI
Jinak ZAMÍTNI.





↳ m proměnných $\quad m \le n$

- $PSPACE \overset{def}{=} \bigcup_{k\ge 0} DSPACE(n^k)$

- $NP \subseteq PSPACE$. <u>Dk</u>: na vstupu x hledej certifikát c.
- $P \subseteq PSPACE$ <u>Dk</u>: triviálně

- $QBF \in PSPACE$

<u>Dk</u>: rekurzivní procedura VYHODNOŤ

VYHODNOŤ(ψ):

1) pokud ψ neobsahuje žádné proměnné, vyhodnoť formuli a vrať YES, pokud je pravdivá, jinak vrať NO.

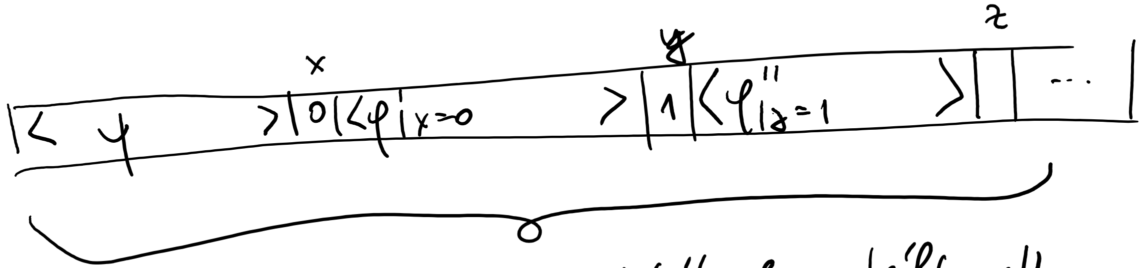
2) $\psi = \forall x\, \varphi(x)$
   dosaď za $x=0 \rightarrow \varphi'|_{x=0}$
   zavolej VYHODNOŤ($\varphi'|_{x=0}$)
   pak dosaď $x=1 \rightarrow \varphi'|_{x=1}$
   zavolej VYHODNOŤ($\varphi'|_{x=1}$)
   pokud obě volání vrátí YES, vrať YES, jinak NO

3) $\psi = \exists x\, \varphi(x)$
   dosaď za $x=0$ ...

dosaď za $x = 0$ ...

⋮ — " —

pokud alespoň jedno volání vrátí YES, vrať YES, jinak NO.



$\approx$ # kvantifikátorů · délka φ

prostor $\leq n^2$

QBF $\in$ PSPACE

- $\forall L \in$ PSPACE, $L \leq^P_m$ QBF $\Rightarrow$ (QBF je PSPACE-úplná)

Dk: • $L \in DSPACE(n^k)$

- TS M pracující v prostoru n^k t.ž. $L(M) = L$.
- M pracuje v čase $2^{O(n^k)}$

↳ # konfigurací TS $M \leq 2^{O(n^k)}$

→ počítá-li M déle, je zacyklený.

$$t_M(n) = |\Gamma| \cdot n^k \cdot |Q| \leq n^k \cdot C^{n^k} = 2^{O(n^k)}.$$

vnitřní stavy TS

pásky hlavy na pásce

- sestrojíme formuli $\psi_0(\overline{c_1}, \overline{c_2})$, která dostane popisy dvou konfigurací $\overline{c_1}$ a $\overline{c_2}$ TS M a bude pravdivá, právě když M z $\overline{c_1}$ přejde v jednom kroce do $\overline{c_2}$.

  c_1 a c_2 jsou kódovány podobně jako v Cook-Levinově větě, konstrukce ψ_0 je též z Cook-Levinovy věty.

- Dále sestrojíme induktivní formuli pro $\ell > 0$.

$$\psi_\ell(\overline{c_1}, \overline{c_2}) = \exists \overline{c_3}\ \forall \overline{u}\ \forall \overline{v} \Big[\big[(\overline{u} = \overline{c_1} \,\&\, \overline{v} = \overline{c_3}) \vee (\overline{u} = \overline{c_3} \,\&\, \overline{v} = \overline{c_2}) \big] \Rightarrow \psi_{\ell-1}(\overline{u}, \overline{v}) \Big]$$

$$\text{"}A \Rightarrow B\text{"} \iff \text{"}\neg A \vee B\text{"}$$

$$\text{"}A \vee \exists x\, \varphi(x,z)\text{"} \iff \text{"}\exists x \big(A \vee \varphi(x,z)\big)\text{"}$$

A nepoužívá proměnnou x

$$\text{"}A \vee \forall x\, \varphi(x,z)\text{"} \iff \text{"}\forall x \big(A \vee \varphi(x,z)\big)\text{"}$$

Pozor: Naivní konstrukce

$$\psi_\ell(\overline{c_1}, \overline{c_2}) = \exists \overline{c_3}\ \psi_{\ell-1}(\overline{c_1}, \overline{c_3}) \wedge \psi_{\ell-1}(\overline{c_3}, \overline{c_2})$$

dává formuli velikosti $\geq 2^\ell$ .... příliš velká

$\Psi_{\lg t_M(n)}(\overline{C_0}, \overline{C_{ACC}})$

$x \to$ počáteční konfigurace $\overline{C_0}$ TS M na vstup x

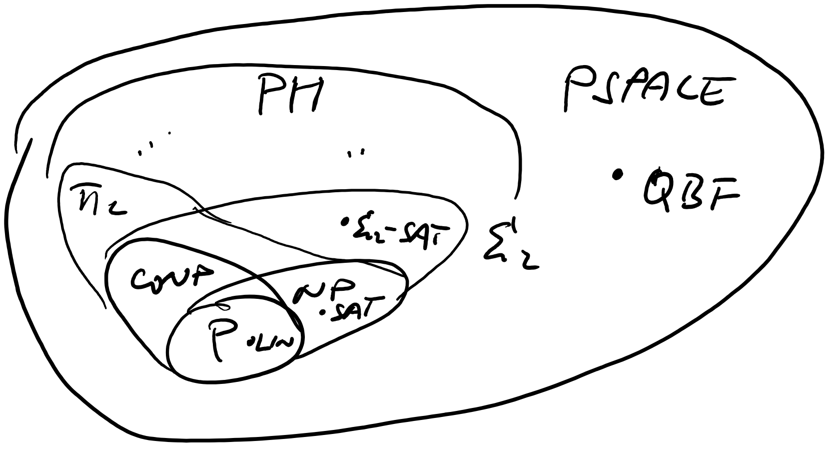
$\overline{C_{ACC}}$ ... přijímající konfigurace TS M na vstupech délky n. (Páska je smazaná a hlava je na prvním políčku.)

$$f(x) = \Psi_{\lg t_M(n)}(\overline{C_0}, \overline{C_{ACC}}) \qquad \lg t_M(n) = O(n^k)$$

$$|\Psi_\ell(\dots)| \le O(\ell \cdot n^k)$$

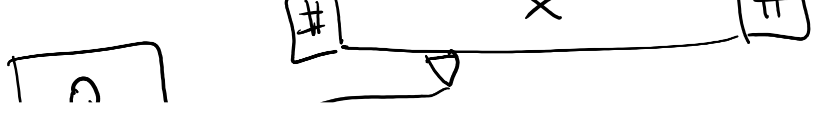
$$\to \quad |f(x)| \le O(n^{2k}).$$

$\Rightarrow$ QBF je PSPACE-úplná

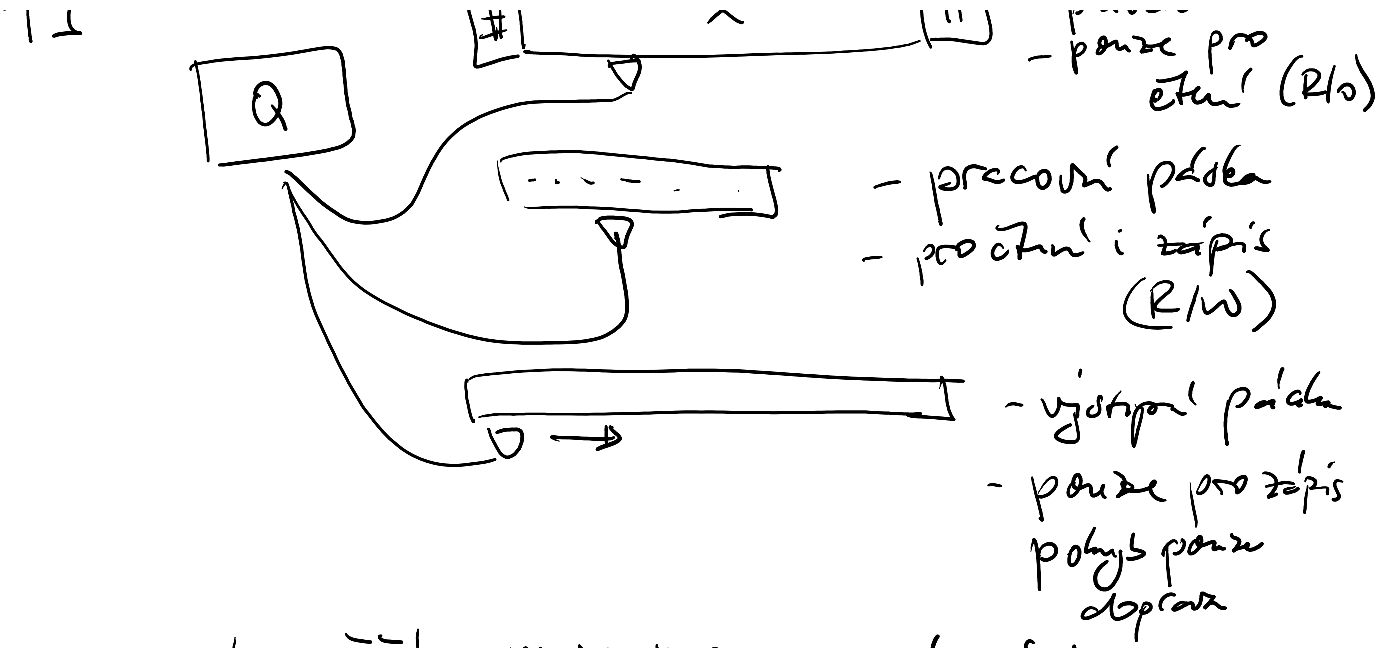


Měření prostoru menšího než $\underline{n}$:

TS



- vstupní páska
- pouze pro čtení (R/O)



- prostor měříme pouze pro pracovní pásku

→ $L = DSPACE(\lg n)$. ... "log-space"
"logaritmický prostor"

– menší prostor než logaritmický je problematický

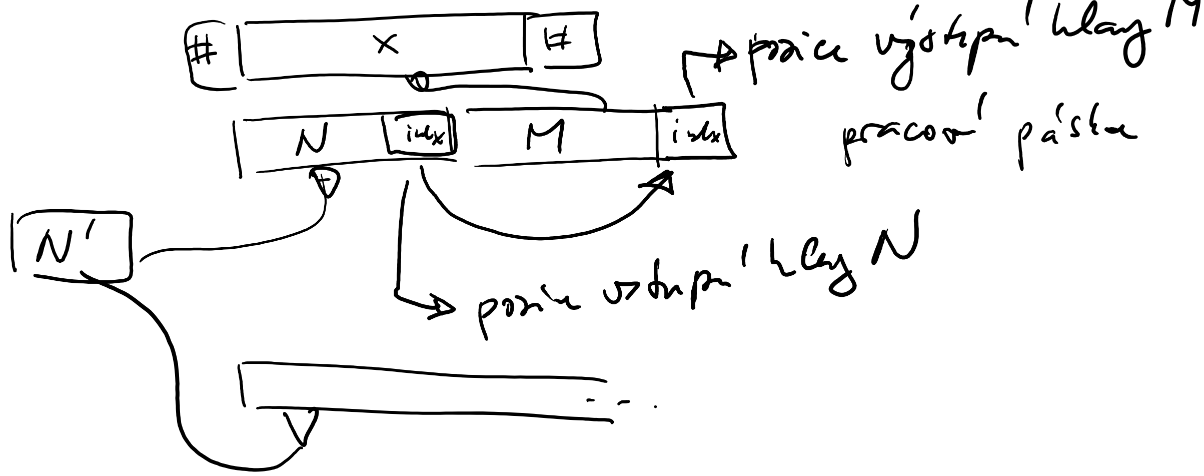
Pozorování: Pokud $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ a $g : \Sigma^* \to \Sigma^*$
jsou spočitatelné v logaritmickém prostoru,
pak i $g(f())$ je počitatelné v logaritmickém
prostoru.

Dk: M ... počítá f
N ... počítá g

... nemáme prostor na uložení $f(x)$.

→ modifikuj N tak, že si pamatuje pozici
vstupní hlavy. Pokaždé si nechá přepočítat

celý výpočet $f(x)$ a sleduje, jaký bit se objeví na požadované pozici, pak pokračuje ve výpočtu



• $A \le_m^{lg} B$ ... A je převeditelná na B v logaritmickém prostoru pokud $\exists f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ počitatelná v logaritmickém prostoru t.ž. $\forall x \in \Sigma^* \quad x \in A \iff f(x) \in B$.

$\Rightarrow \le_m^{lg}$ je tranzitivní

• $ADD : \{0,1\}^* \times \{+\} \times \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$

$ADD(x+y) = x+y$ ... sčítání

ADD je počitatelná v logaritmickém prostoru.

$*$ MULT —"—

$/$ DIV —"—

$STCONN = \{\langle G, s, t\rangle,$ G je graf obsahující vrcholy s a t, a existuje cesta z s do t $\}$.

USTCONN = $\{ \langle G, s, t \rangle$; G je neorientovaný graf ... $\}$

- USTCONN $\in$ L [Reingold 2005] ... netriviální výsledek

pravděpodobnostní/nedeterministický algoritmus pro STCONN:

na vstupu (G, s, t)

polož $u := s$

opakuj $10n^3$-krát:

zvol náhodného souseda v vrcholu u

polož $u := v$

pokud $u = t$ pak se zastav & ACC

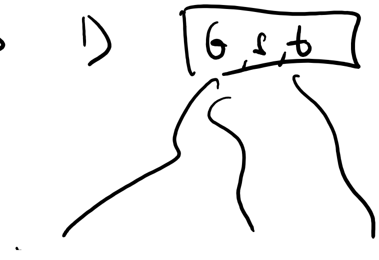
REJECT.

1) pokud neexistuje cesta $s \leadsto t$, pak algoritmus dá vždy správnou odpověď

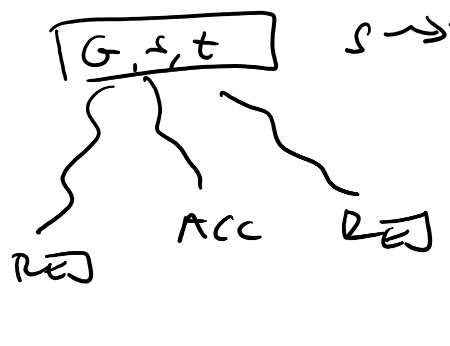
2) pokud existuje cesta $s \leadsto t$, pak algoritmus dá správnou odpověď s nenulovou pravděpodobností.

(Pokud G je neorientovaný a cesta $s \leadsto t$ existuje, pak alg. přijme s pstí $\geq \frac{3}{4}$.)

$\rightarrow$ 1) $s \not\leadsto t$



2) $s \leadsto t$



RED RED RED

nedeterministický výpočet pracující v logaritmickém prostoru

$NL = \{ A \subseteq \Sigma^*;$ A má nedeterministický TS pracující v logaritmickém prostoru $\}$, ... „nedeterministický logaritmický prostor"

- $L \subseteq NL$
- $STCONN \in NL$
- $\forall A \in NL$, $A \leq^{lg}_{m} STCONN$

(STCONN je NL-úplný)

Dk:

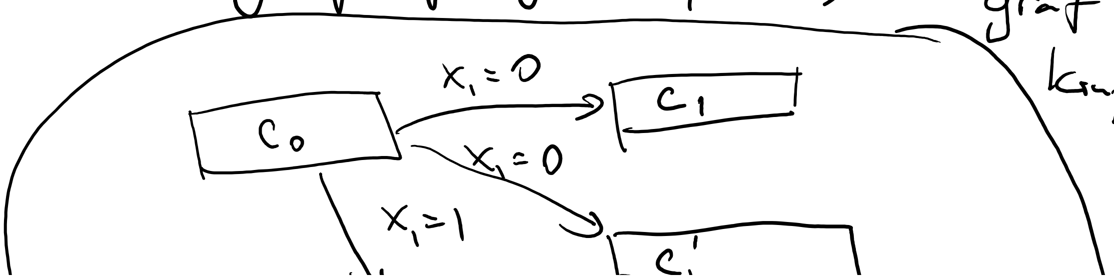
- A je přijímán nedet. TS M pracujícím v prostoru $s_M(n) = O(\lg n)$.
- na vstupu x délky n, M má pouze $|\Gamma|^{s_M(n)} \cdot s_M(n) \cdot n \cdot |Q|$ různých konfigurací.

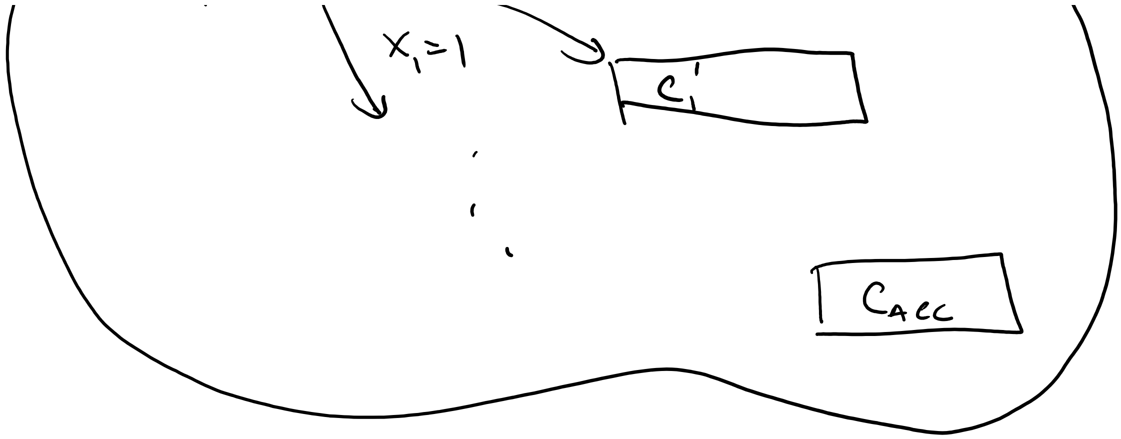
pozice vstupní hlavy

pozice hlavy na prac. pásce

(Obsah vstupní a výstupní pásky se nepočítá)

graf konfigurací





$\exists$ cesta z c_0 do C_{ACC}?

\# konfigurací $\le 2^{O(s_M(n))} \le O(n^k)$
pro nějaké k.

$x \longrightarrow (G_x, c_0, c_{ACC})$ ∎

- $L \subseteq P$

<u>Savitchova Věta</u>: $STCONN \in DSPACE(\lg^2 n)$

$(NL \subseteq DSPACE(\lg^2 n)$,
$PSPACE = NPSPACE)$

$NPSPACE$ = nedeterministický polynomiální prostor

<u>Dk.:</u>

<u>stp (G, s, t):</u>
spočítej počet vrcholů $G \to n$
zavolej rekurzivní proceduru:
$REACH(s, t, n)$ a přijmi, pokud vrátí YES

<u>$REACH(u_1, u_2, \ell)$:</u>
pro všechna <u>w</u> $\in V(G)$

zavolej REACH(u_1, w, $\lceil \ell/2 \rceil$), pak
REACH(w, u_2, $\lceil \ell/2 \rceil$)
pokud oba vrátí YES, vrať YES,
vrať NO.

hloubka rekurze: $\lg n$

prostor : $O(\lg n)$ na pomocné proměnné na daném úrovni volání.

$\Rightarrow O(\lg^2 n)$ celkový prostor ☒

- Pokud STCONN $\in$ L $\Rightarrow$ L = NL.
- $\text{coNL} = \{ A \subseteq \Sigma^*, \; \bar{A} \in L \}$
- <u>Věta</u> (Immerman, Szelepcsényi): NL = coNL.